

平面図学における近似画法適用の基準

高 取 芳 武*

Application of the Standardized Approximate Drawing Process on the Plane Descriptive Geometry.

by Yoshitake Takatori*

Synopsis: There are some questions regarding the quantity of error in approximate drawing process on the plane descriptive geometry.

The author calculated the accurate numerical value analitically on the absolute and relative error of approximate process reported in many publications, and found the tendency of variation, and also discussed the merits which has many solutions especially.

It should be avoided the application of approximate method beyond the limits of remarkable error on the drawing, and advisable to determine as standard error within allowable range.

To confirm the actual condition, pursued that the probability limits from the result of the definite drawing work, and moreover, investigated the instrument error, which usually, contains in the work error, taking the statistics and found the relative error of work including instrument error.

Then relative error corresponding will be permissible, and allowable to apply practically although beyond this value unless absolute error appears remarkably.

Therefore, it should be attached importance to absolute error on the drawing, and the relative error on the descriptive geometry on the other hand.

This paper, indicated the application of the standardized approximate drawing process finding these errors.

要旨 平面図学における近似画法の適用については、その誤差の多少が問題になる。多くの図学書に載っている近似画法の絶対誤差および相対誤差を解析によって詳しい数値と変化の傾向を求め、特に解法が多数あるものについては、その優劣を比較してみた。これによって作図の際誤差が図面に明かに現れる範囲まで近似画法を適用するのは避けるべきであって、画法誤差の許容範囲は作業誤差を基準として決めなければならない。この作業誤差の実態を知るため一定の作業結果からの確率分布を求め、さらに作業誤差中には用具誤差も当然含まれているので併せてこれを検討した。この結果用具誤差を含む作業の相対誤差が明かとなり、これに相当する数値以下の画法の相対誤差は一般に許さるべきものであり、またたとえこの値を越えても絶対誤差が図面に著しく現れない限り、その近似画法によって作図を行なっても実用上差支ないと考えられる。図学においては相対誤差を、また製図においては主として絶対誤差を重視すべきである。

本論文にはこれら誤差判定による近似画法適用の基準を示した。

平面図学における近似画法の誤差については、一般の図学図書にその数値が示されていない場合が多く、殊に与角の任意等分の解法には誤差数値が明かでない。また同一の課題で2つ以上の解法があるものについては、誤差の程度と、いずれの方法が優れているのか適用に際して当惑を生ずる場合がある。

この問題を解決するため、現在普及している多くの近似画法について解析を行ない、角度または線分の絶対誤差と相対誤差との数値を小数点以下8けたまで精しく算出してみた。計算の結果を表1～5にまとめ、誤差が角度または線分の関数となるものについては、誤差変化の傾向をグラフ1～5に示した。さらに画法が数多あるものについては、これらを比較しておいたので適用に際して取捨選択が自由にできる。

* 電気工学教室 教授
Professor, Electrical Engineering Division

§ 1. 与角 θ を n 等分する画法

Fig. 1 において与角 $\angle AOB$ を θ とし, **Fig. 1** の O を座標の原点, 任意の円の半径 $OA=OB=1$ とすれば

$P\left(-\frac{O}{\sqrt{3}}\right), B\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$ を通る直線の方程式は

$$y + \sqrt{3} = \frac{\sin \theta + \sqrt{3}}{\cos \theta} x$$

直線 PB が X 軸と交わる点 B_1 の座標は

$$\overline{OB_1} = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{3}}$$

線分 $\overline{AB_1}$ を n 等分すれば各点の X 座標は

$$\overline{OC_1} = \frac{n-1}{n} \overline{OB_1} + \frac{1}{n}$$

$$\overline{OD_1} = \frac{n-2}{n} \overline{OB_1} + \frac{2}{n}$$

.....

$$\overline{ON_1} = \frac{1}{n} \overline{OB_1} + \frac{n-1}{n}$$

となり

直線 PC, PD, \dots, PN の方程式は

$$\frac{x}{\overline{OC_1}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1, \frac{x}{\overline{OD_1}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1, \dots$$

$$\frac{x}{\overline{ON_1}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$$

θ_1 については

$$\left(\frac{3}{\overline{OC_1}} + 1\right)x_e^2 - \frac{6}{\overline{OC_1}}x_e + 2 = 0 \quad \text{より}$$

$$x_e = \frac{\frac{6}{\overline{OC_1}} + \sqrt{\frac{12}{\overline{OC_1}^2} - 8}}{\frac{6}{\overline{OC_1}^2} + 2} \quad y_e = \sqrt{1 - x_e^2}$$

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\overline{BC}^2}{2}\right)$$

$$\text{Absolute Error} = \theta_1 - \frac{\theta}{n}$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\theta_1 - \frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}$$

θ_2 以下についても同様に求められる。

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \theta$$

Table 1 に計算数値を示し, **Graph 1** はこれらを図示したものである。

Table 1 には $\theta=30^\circ$ より 180° まで 30° ごとに, また $n=3, 5, 7$ を代表的に選んで, 誤差変化の傾向を求めた。

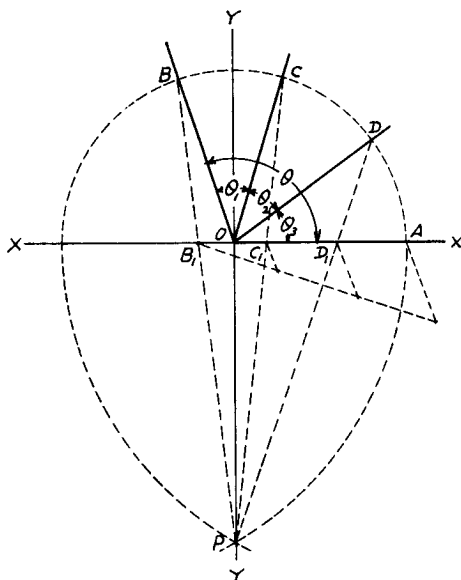


Fig. 1

Table 1-1

Angle $\theta = 30^\circ = 0.52359878 \text{ rad.}$

30°	$\theta/3 = 10^\circ 0' 0'' = 0.17453293 \text{ rad.}$			$\theta/5 = 6^\circ 0' 0'' = 0.10471976 \text{ rad.}$			$\theta/7 = 4^\circ 17' 9'' = 0.07479982 \text{ rad.}$		
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G. V.	A. E.	R. E.	G. V.	A. E.	R. E.
θ_1^{deg} rad	$9^\circ 41' 52''$ 0.1692 5835	$-18' 8''$ -0.0052 7457	0.0302 2107	$5^\circ 48' 19''$ 0.1013 2239	$-11' 41''$ -0.0033 9736	0.0324 4244	$4^\circ 8' 37''$ 0.0723 1908	$-8' 32''$ -0.0024 8075	0.0331 6513
θ_2^{deg} rad	$9^\circ 53' 48''$ 0.1727 2877	$-6' 12''$ -0.0018 0415	0.0103 3702	$5^\circ 50' 57''$ 0.1020 8756	$-9' 3''$ -0.0026 3220	0.0251 3564	$4^\circ 9' 40''$ 0.0726 2699	$-7' 28''$ -0.0021 7283	0.0290 4863
θ_3^{deg} rad	$10^\circ 24' 19''$ 0.1816 1164	$+24' 20''$ +0.0070 7872	0.0405 5807	$5^\circ 56' 0''$ 0.1035 5775	$-4' 0''$ -0.0011 6200	0.0110 9629	$4^\circ 11' 28''$ 0.0731 4748	$-5' 41''$ -0.0016 5234	0.0220 9018
θ_4^{deg} rad				$6^\circ 4' 50''$ 0.1061 2439	$+4' 50''$ +0.0014 0464	0.0134 1329	$4^\circ 14' 14''$ 0.0739 5429	$-2' 54''$ -0.0008 4554	0.0113 0402
θ_5^{deg} rad				$6^\circ 19' 54''$ 0.1105 0668	$+19' 54''$ +0.0057 8693	0.0552 6109	$4^\circ 18' 22''$ 0.0751 5405	$+1' 13''$ +0.0003 5423	0.0047 3569
θ_6^{deg} rad							$4^\circ 24' 24''$ 0.0769 0965	$+7' 15''$ +0.0021 0983	0.0282 0632
θ_7^{deg} rad							$4^\circ 33' 15''$ 0.0794 8723	$+16' 7''$ +0.0046 8740	0.0626 6592

Table 1-2

Angle $\theta = 60^\circ$ $\theta = 1.04719755 \text{ rad.}$									
60°	$\theta/3 = 20^\circ 0' 0''$ 0.34906585 rad.		$\theta/5 = 12^\circ 0' 0''$ 0.20943951 rad.		$\theta/7 = 8^\circ 34' 16''$ 0.14959965 rad.				
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G. V.	A. E.	R. E.	G. V.	A. E.	R. E.
θ_1 deg rad	$19^\circ 43' 20''$ 0.34421710	$-16' 40''$ -0.00484875	0.01389065	$11^\circ 51' 40''$ 0.20701706	$-8' 20''$ -0.00242245	0.01156636	$8^\circ 28' 54''$ 0.14803495	$-5' 23''$ -0.00156470	0.01045928
θ_2 deg rad	$19^\circ 39' 23''$ 0.34307078	$-20' 37''$ -0.00599508	0.01717463	$11^\circ 46' 59''$ 0.20565189	$-13' 1''$ -0.00378762	0.01808455	$8^\circ 26' 11''$ 0.14723982	$-8' 7''$ -0.00235983	0.01577429
θ_3 deg rad	$20^\circ 37' 17''$ 0.35990969	$+37' 17''$ $+0.01084384$	0.03106530	$11^\circ 46' 50''$ 0.20561006	$-13' 10''$ -0.00382945	0.01828427	$8^\circ 24' 23''$ 0.14672023	$-9' 54''$ -0.00287942	0.01924749
θ_4 deg rad				$11^\circ 58' 2''$ 0.20886876	$-1' 58''$ -0.00057075	0.00272514	$8^\circ 24' 44''$ 0.14681939	$-9' 33''$ -0.00278026	0.01858465
θ_5 deg rad				$12^\circ 36' 29''$ 0.22004978	$+36' 29''$ $+0.01061027$	0.05066032	$8^\circ 29' 2''$ 0.14807417	$-5' 15''$ -0.00152548	0.01019707
θ_6 deg rad							$8^\circ 40' 35''$ 0.15143099	$+6' 18''$ $+0.00183134$	0.01224162
θ_7 deg rad							$9^\circ 6' 11''$ 0.15887799	$+3' 54''$ $+0.00927834$	0.06202114

Table 1-3

Angle $\theta = 90^\circ = 1.57079633 \text{ rad.}$									
90°	$\theta/3 = 30^\circ 0' 0'' = 0.52359878 \text{ rad.}$		$\theta/5 = 18^\circ 0' 0'' = 0.31415926 \text{ rad.}$		$\theta/7 = 12^\circ 51' 26'' = 0.22439947 \text{ rad.}$				
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G. V.	A. E.	R. E.	G. V.	A. E.	R. E.
θ_1^{deg}	$30^\circ 0' 0''$	$0' 0''$	0.00000000	$18^\circ 2' 48''$	$+ 2' 48''$	0.00258594	$12^\circ 54' 1''$	$+ 2' 35''$	0.00335118
θ_2^{deg}	$29^\circ 31' 36''$	$- 28' 24''$	0.01578095	$17^\circ 53' 45''$	$- 6' 15''$	0.00578862	$12^\circ 50' 27''$	$- 0' 59''$	0.00128050
θ_3^{deg}	$30^\circ 28' 24''$	$+ 28' 24''$	0.01578094	$17^\circ 42' 7''$	$- 17' 53''$	0.01656457	$12^\circ 44' 27''$	$- 6' 59''$	0.00904349
θ_4^{deg}	$53' 18.6165''$	$+ 0.00826288$		$17^\circ 43' 19''$	$- 16' 41''$	0.01544751	$12^\circ 38' 29''$	$- 12' 56''$	0.01677166
θ_5^{deg}				$18^\circ 38' 2''$	$+ 38' 2''$	0.03521479	$12^\circ 36' 48''$	$- 14' 38''$	0.01896594
θ_6^{deg}				3252.2232	$+ 0.01106305$		$12^\circ 47' 14''$	$- 4' 11''$	0.00542813
θ_7^{deg}							$13^\circ 28' 34''$	$+ 37' 8''$	0.04813858

Table 1-4

Angle $\theta = 120^\circ = 2.09439510 \text{ rad}$									
120°	$\theta/3 = 40^\circ 0' 0'' = 0.69813170 \text{ rad}$		$\theta/5 = 24^\circ 0' 0'' = 0.41887902 \text{ rad}$		$\theta/7 = 17^\circ 8' 34'' = 0.29919930 \text{ rad}$				
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G. V.	A. E.	R. E.	G. V.	A. E.	R. E.
θ_1^{deg}	$40^\circ 2' 12''$ 0.69877270	$+2' 12''$ +0.00064100	0.00091816	$23^\circ 58' 34''$ 0.41846104	$-1' 26''$ -0.00041798	0.00099786	$17^\circ 5' 59''$ 0.29844730	$-2' 35''$ -0.00075200	0.00251338
θ_2^{deg}	$39^\circ 41' 8''$ 0.69264194	$-18' 52''$ -0.00548976	0.00786350	$24^\circ 4' 14''$ 0.42010940	$+4' 14''$ +0.00123038	0.00293731	$17^\circ 12' 12''$ 0.30025648	$+3' 38''$ +0.00105718	0.00353335
θ_3^{deg}	$40^\circ 16' 40''$ 0.70298045	$+16' 40''$ +0.00484875	0.00694532	$23^\circ 48' 53''$ 0.41564418	$-11' 7''$ -0.00323484	0.00772262	$17^\circ 10' 2''$ 0.29962415	$+1' 28''$ +0.00042485	0.00141997
θ_4^{deg}				$23^\circ 33' 49''$ 0.41126195	$-26' 11''$ -0.00761707	0.01818441	$17^\circ 0' 41''$ 0.29690456	$-7' 53''$ -0.00224474	0.00766959
θ_5^{deg}				$24^\circ 34' 31''$ 0.42891855	$+34' 31''$ +0.01003953	0.02396760	$16^\circ 50' 34''$ 0.29396006	$-18' 1''$ -0.00523924	0.01751089
θ_6^{deg}							$16^\circ 53' 46''$ 0.29489357	$-14' 48''$ 0.00430573	0.01439086
θ_7^{deg}							$17^\circ 46' 46''$ 0.31030898	$+38' 11''$ +0.0110968	0.03713138

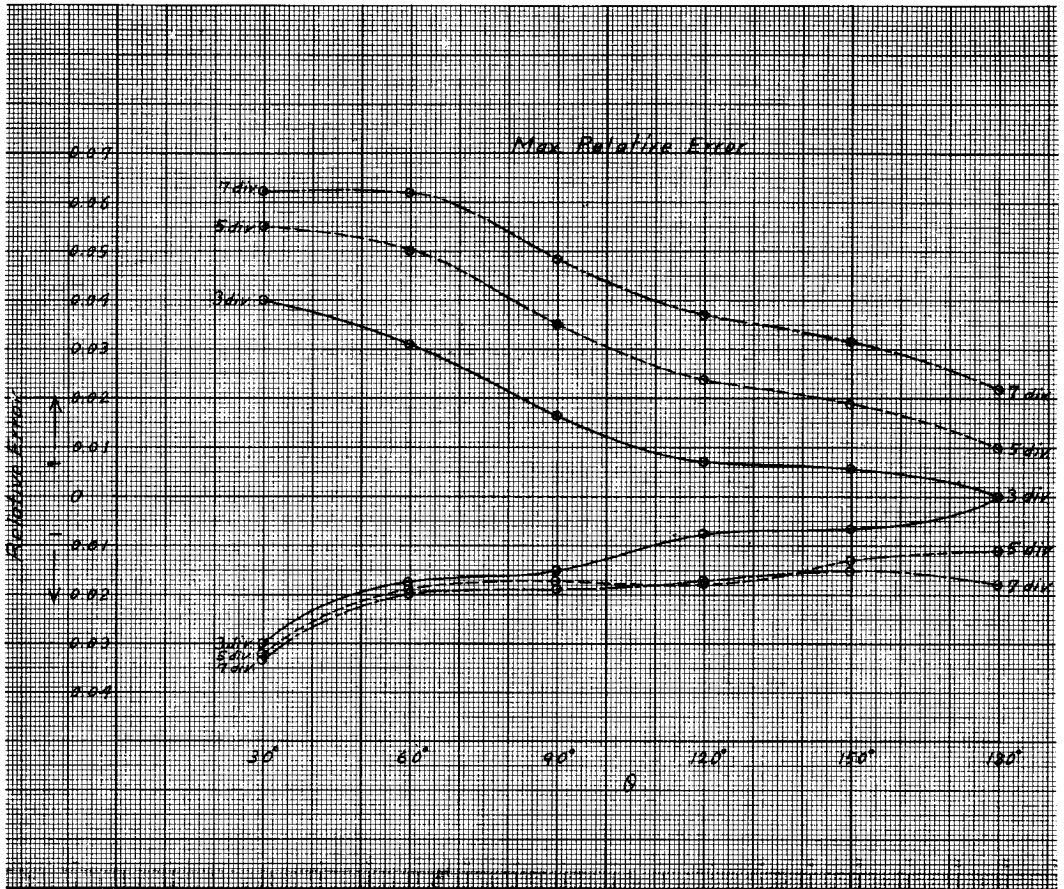
Table 1-5

Angle $\theta = 150^\circ$ $\theta = 2.61799388 \text{ rad.}$									
150°	$\theta/3 = 50^\circ 0' 0''$ 0.87266462 rad.		$\theta/5 = 30^\circ 0' 0''$ 0.52359878 rad.		$\theta/7 = 21^\circ 25' 43''$ 0.37399913 rad.		G. V.	A. E.	R. E.
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G. V.	A. E.	R. E.			
θ_1^{deg}	$49^\circ 38' 27''$	$-2' 1' 33''$	0.00718474	$29^\circ 37' 1''$	$-22' 59''$	0.01276698	$21^\circ 6' 37''$	$-19' 6''$	0.01485736
θ_2^{deg}	$49^\circ 38' 27''$	-0.00626986		0.51691400	-0.00668477		0.36844249	-0.00555664	
θ_3^{deg}	$50^\circ 5' 29''$	$+5' 29''$	0.00182841	$30^\circ 5' 32''$	$+5' 32''$	0.00307684	$21^\circ 21' 20''$	$-4' 23''$	0.00340675
θ_4^{deg}	$50^\circ 5' 29''$	$+0.00159559$		0.52520980	$+0.00161103$		0.37272500	-0.00127412	
θ_5^{deg}	$50^\circ 16' 4''$	$+16' 4''$	0.00535632	$30^\circ 5' 57''$	$+5' 57''$	0.00330542	$21^\circ 33' 38''$	$+7' 55''$	0.00616323
θ_6^{deg}	$50^\circ 16' 4''$	$+0.00467427$		0.52532949	$+0.00173072$		0.37630417	$+0.00230504$	
θ_7^{deg}	$50^\circ 16' 4''$			$29^\circ 37' 25''$	$-22' 36''$	0.01255199	$21^\circ 30' 31''$	$+4' 48''$	0.00373950
θ_8^{deg}	$50^\circ 16' 4''$			0.51702657	-0.00657221		0.37539770	$+0.00139857$	
θ_9^{deg}	$50^\circ 16' 4''$			$30^\circ 34' 5''$	$+34' 5''$	0.01893671	$21^\circ 14' 51''$	$-10' 52''$	0.00844982
θ_{10}^{deg}	$50^\circ 16' 4''$			0.53351402	$+0.00991524$		0.37083890	-0.00316023	
θ_{11}^{deg}	$50^\circ 16' 4''$						$21^\circ 6' 47''$	$-18' 56''$	0.01472805
θ_{12}^{deg}	$50^\circ 16' 4''$						0.36849085	-0.00550828	
θ_{13}^{deg}	$50^\circ 16' 4''$						$22^\circ 6' 16''$	$+40' 33''$	0.03153924
θ_{14}^{deg}	$50^\circ 16' 4''$						0.38579477	$+0.01179565$	

Table 1-6

$\text{Angle } \theta = 180^\circ$
 $\theta = 3.14159265 \text{ rad}$

180°	$\theta/3 = 60^\circ 0' 0''$ 1.04719755 rad		$\theta/5 = 36^\circ 0' 0''$ 0.62831853 rad		$\theta/7 = 25^\circ 42' 51''$ 0.44879895 rad	
	Graphical Value	Absolute Error	Relative Error	G V	A. E.	R. E.
θ_1^{deg} rad	$60^\circ 0' 0''$ 1.04719755	$0' 0''$ 0.00000000	0.00000000	$36^\circ 21' 21''$ 0.63452860	$+21' 21''$ $+0.00621007$	0.00988364
θ_2^{deg} rad	$60^\circ 0' 0''$ 1.04719755	$0' 0''$ 0.00000000	0.00000000	$35^\circ 35' 52''$ 0.62129607	$-24' 8''$ -0.00702246	0.01117660
θ_3^{deg} rad	$60^\circ 0' 0''$ 1.04719755	$0' 0''$ 0.00000000	0.00000000	$36^\circ 5' 35''$ 0.62994331	$+5' 35''$ $+0.00162479$	0.00258593
θ_4^{deg} rad				$35^\circ 35' 52''$ 0.62129607	$-24' 8''$ -0.00702246	0.01117660
θ_5^{deg} rad				$36^\circ 21' 21''$ 0.63452860	$+21' 21''$ $+0.00621007$	0.00988364
θ_6^{deg} rad						
θ_7^{deg} rad						



Graph 1

§ 2. 与長 \overline{AB} を1辺とする正 N 边形を描く画法

解法A

与長 \overline{AB} を1とする半円の直径を N 等分し、点 A より $N-2$ 番目の点を Q とする、点 B を座標の原点とすれば点 $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ と、点 $Q\left(\frac{N-4}{N}, 0\right)$ とを結ぶ直線の方程式は

$$\frac{N}{N-4}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - 1 = 0$$

であってこれと半円周との交点を C とすれば \overline{BC} は \overline{AB} の隣接辺となり、点 C の X 座標は

$$x_N = \frac{6\left(\frac{N}{N-4}\right) + \sqrt{12\left(\frac{N}{N-4}\right)^2 - 8}}{6\left(\frac{N}{N-4}\right) + 2}$$

内 角 $\theta = \sin^{-1} x_N$

中心角 $\phi = \pi - \theta$

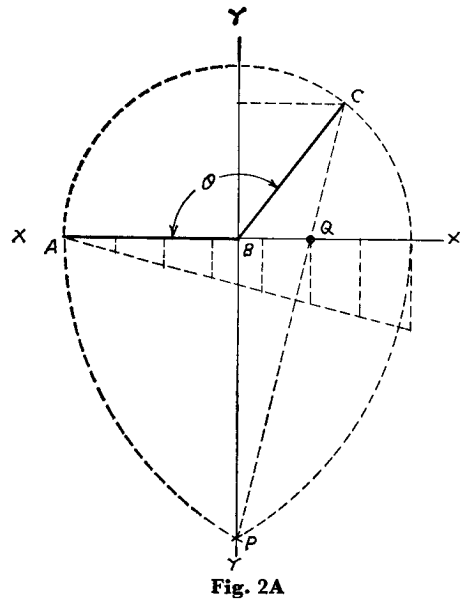
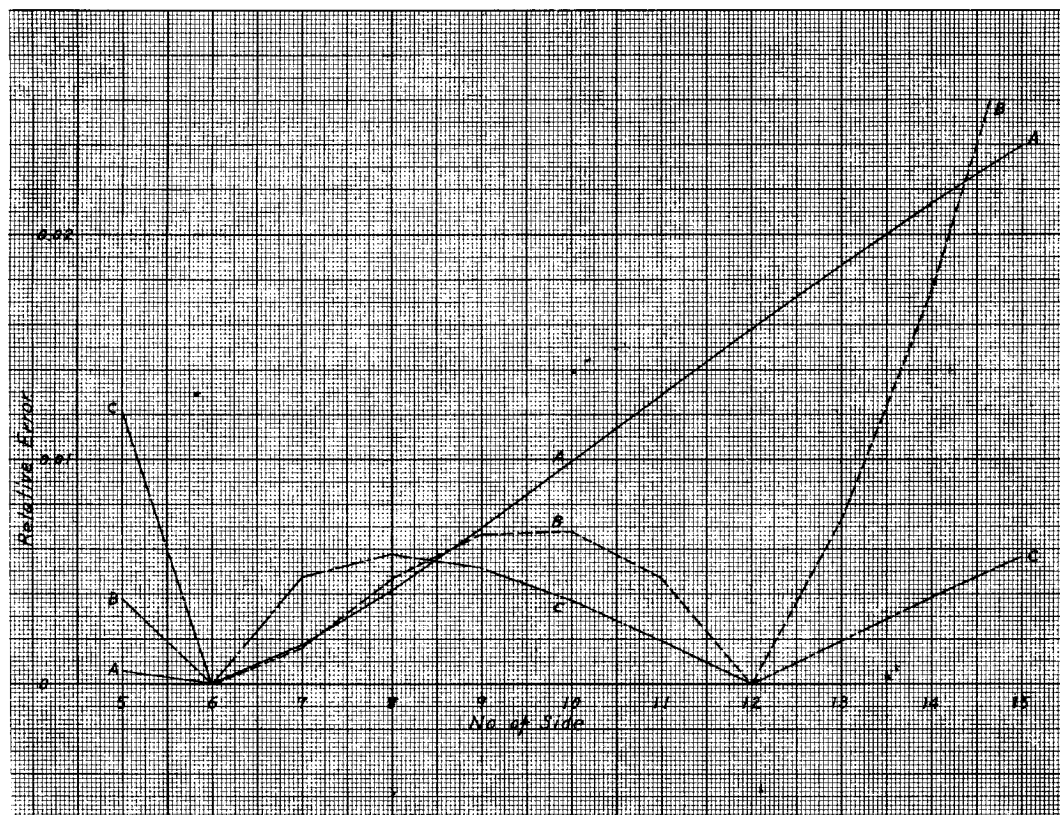


Fig. 2A



Graph 2

ここに正しい中心角は $\phi_0 = \frac{2\pi}{N}$ であるから

$$\text{Absolute Error} = \phi - \phi_0$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$$

Table 2A に $N=5 \sim 15$ の計算数値を示し、**Graph 2** にこれらを図示した。

解法 B (Dividing Arc Method)

与長 \overline{AB} を半径とする弧 $\widehat{B6}$ を 6 等分し、点 6 を中心とする弧を描き \overline{AB} の垂直二等分線 CY 上に正多角形の内接円の中心を求める。

(例えば **Fig. 2B** の点 9 は正 9 辺形の中心で ϕ_9 はこの場合の中心角を示す)

一般に

$$\text{弦長 } l = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\text{内接円半径 } r = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

(ただし式中の \pm の負記号は $N=5$ の場合) 中心角を ϕ とすれば

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

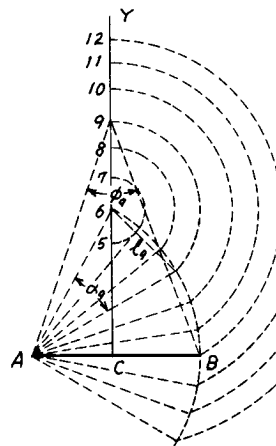


Fig. 2B

解法 C (Dividing Chord Method)

与長 \overline{AB} を 1 とし、これを底辺とする正 3 角形の 1 辺 $\overline{B6}$ を 6 等分して、点 6 を中心とする弧を描き \overline{AB} の垂直二等分線 CY 上に正多角形の内接円の中心を求める。

(例えば **Fig. 2C** の点 9 は正 9 辺形の中心で ϕ_9 はこの

Table 2-A

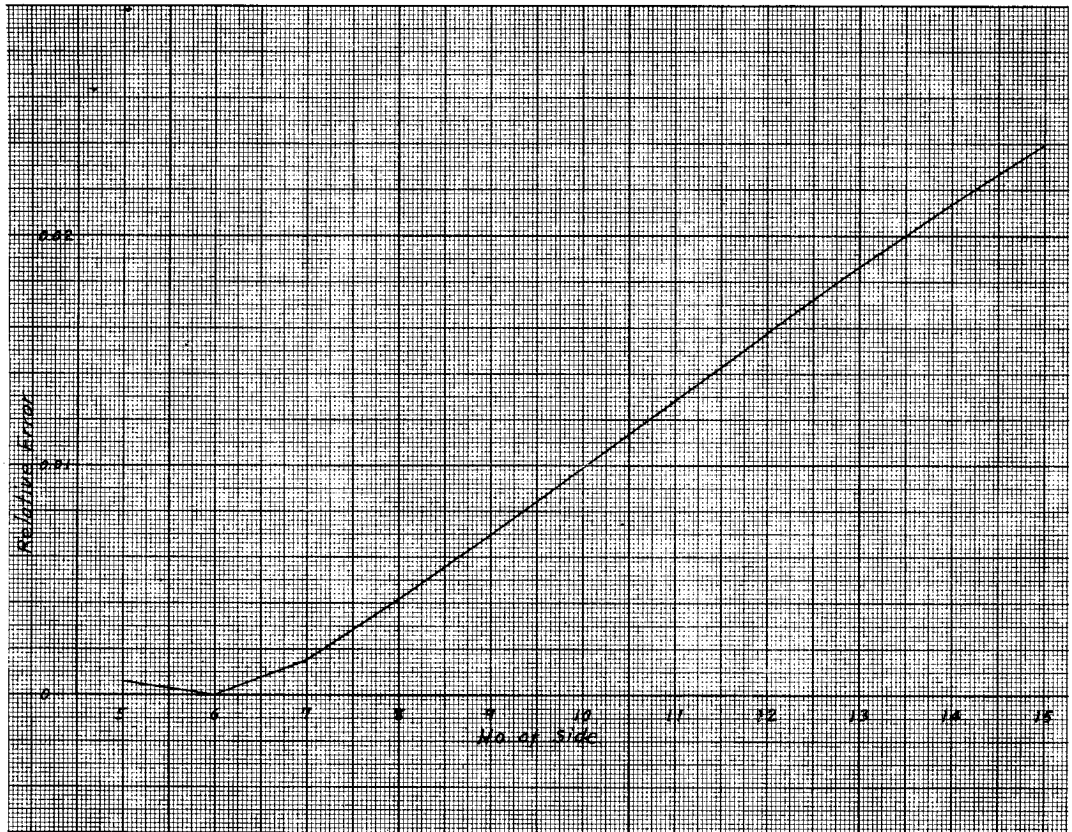
No. of side <i>N</i>	Accurate Interior Angle θ_0	Graphical Interior Angle θ	Accurate Central Angle ϕ_0	Graphical Central Angle ϕ	Absolute Error $\phi - \phi_0$	Relative Error $\frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$
5 deg rad	108° 0' 0" 1.8849 5559	108° 2' 48" 1.8857 6799	72° 0' 0" 1.2566 3706	71° 57' 12" 1 2558 2467	- 2' 48" - 0.0008 1239	0.0006 4648
6 deg rad	120° 0' 0" 2.0943 9510	120° 0' 0" 2.0943 9510	60° 0' 0" 1.0471 9755	60° 0' 0" 1.0471 9755	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000
7 deg rad	128° 34' 17" 2.2439 9475	128° 28' 54" 2.2424 3005	51° 25' 43" 0.8975 9790	51° 31' 6" 0.8991 6260	+ 5' 23" + 0.0015 6470	0 0017 4321
8 deg rad	135° 0' 0" 2.3561 9449	134° 48' 45" 2.3529 2424	45° 0' 0" 0.7853 9816	45° 11' 15" 0.7886 6841	+ 11' 15" + 0.0032 7025	0.0041 6381
9 deg rad	140° 0' 0" 2.4434 6095	139° 43' 20" 2.4386 1216	40° 0' 0" 0.6981 3170	40° 16' 40" 0.7029 8050	+ 16' 40" + 0.0048 4880	0.0069 4539
10 deg rad	144° 0' 0" 2.5132 7413	143° 38' 39" 2.5070 6401	36° 0' 0" 0.6283 1853	36° 21' 21" 0.6345 2864	+ 21' 21" + 0.0062 1011	0.0098 8369
11 deg rad	147° 16' 22" 2.5703 9399	146° 51' 7" 2.5630 5196	32° 43' 38" 0.5711 9866	33° 8' 53" 0.5785 4069	+ 25' 14" + 0.0073 4203	0 0128 5372
12 deg rad	150° 0' 0" 2.6179 9388	149° 31' 36" 2.6097 3096	30° 0' 0" 0.5235 9878	30° 28' 24" 0.5318 6169	+ 28' 24" + 0.0082 6292	0.0157 8101
13 deg rad	152° 18' 28" 2.6582 7071	151° 47' 31" 2.6492 6997	27° 41' 32" 0.4833 2195	28° 12' 29" 0.4923 2268	+ 30' 57" + 0.0090 0074	0.0186 2265
14 deg rad	154° 17' 9" 2.6927 9370	153° 44' 12" 2.6832 0946	25° 42' 51" 0.4487 9895	26° 15' 48" 0.4583 8319	+ 32' 57" + 0.0095 8424	0 0213 5530
15 deg rad	156° 0' 0" 2.7227 1363	155° 25' 29" 2.7126 7407	24° 0' 0" 0.4188 7902	24° 34' 31" 0.4289 1858	+ 34' 31" + 0.0100 3956	0 0239 6768

Table 2-B, C

No. of Side <i>N</i>	Accurate Central Angle ϕ_0	Dividing		Method		Dividing		Chord		Method $\frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$
		Graphical Central Angle ϕ	Absolute Error $\phi - \phi_0$	Relative Error $\frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$	Graphical Central Angle ϕ	Absolute Error $\phi - \phi_0$	Relative Error $\frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$			
5 deg. rad.	72° 0' 0" 1.2566 3706	71° 43' 19" 1.2517 8471	- 16' 41" - 0.0048 5235	0.0038 6138	71° 7' 30" 1.2413 6607	- 52' 30" - 0.0152 7099	0.0121 5227			
6 deg. rad.	60° 0' 0" 1.0471 9755	60° 0' 0" 1.0471 9755	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000	60° 0' 0" 1.0471 9755	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000			
7 deg. rad.	51° 25' 43" 0.8975 9790	51° 20' 21" 0.8960 3702	- 5' 22" - 0.0015 6088	0.0017 3895	51° 40' 12" 0.9018 0952	+ 14' 29" + 0.0042 1162	0.0046 9210			
8 deg. rad.	45° 0' 0" 0.7853 9816	44° 47' 32" 0.7817 7345	- 12' 28" - 0.0036 2472	0.0046 1513	45° 15' 41" 0.7899 6186	+ 15' 41" + 0.0045 6369	0.0058 1068			
9 deg. rad.	40° 0' 0" 0.6981 3170	39° 44' 8" 0.6935 1723	- 15' 52" - 0.0046 1447	0.0066 0974	40° 12' 28" 0.7017 5882	+ 12' 28" + 0.0036 2712	0.0051 9547			
10 deg. rad.	36° 0' 0" 0.6283 1853	35° 45' 22" 0.6240 5948	- 14' 38" - 0.0042 5905	0.0067 7849	36° 8' 6" 0.6306 7603	+ 8' 6" + 0.0023 5750	0.0037 5207			
11 deg. rad.	32° 43' 38" 0.5711 9866	32° 34' 29" 0.5685 3802	- 9' 9" - 0.0026 6065	0.0046 5800	32° 47' 27" 0.5723 0718	+ 3' 49" + 0.0011 0851	0.0019 4068			
12 deg. rad.	30° 0' 0" 0.5235 9878	30° 0' 0" 0.5235 9878	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000	30° 0' 0" 0.5235 9878	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000			
13 deg. rad.	27° 41' 32" 0.4833 2195	27° 53' 45" 0.4868 7567	+ 12' 13" + 0.0035 5372	0.0073 5271	27° 38' 18" 0.4823 8166	- 3' 14" - 0.0009 4029	0.0019 4547			
14 deg. rad.	25° 42' 51" 0.4487 9895	26° 9' 54" 0.4566 6501	+ 27' 2" + 0.0078 6606	0.0175 2691	25° 36' 57" 0.4470 7922	- 5' 55" - 0.0017 1973	0.0038 3185			
15 deg. rad.	24° 0' 0" 0.4188 7902	24° 44' 8" 0.4317 1784	+ 44' 8" + 0.0128 3882	0.0306 5043	23° 51' 54" 0.4165 2152	- 8' 6" - 0.0023 5750	0.0056 2811			

Table 3

No. of side N	Accurate Interior Angle θ	Graphical Interior Angle θ	Accurate Central Angle ϕ	Graphical Central Angle ϕ	Absolute Error $\phi - \phi_0$	Relative Error $\frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$
5 deg rad	108° 0' 0" 1.8849 5559	108° 2' 48" 1.8857 6802	72° 0' 0" 1.2566 3706	71° 57' 12" 1.2558 2463	- 2' 48" -0.0008 1243	0.0006 4651
6 deg rad	120° 0' 0" 2.0943 9510	120° 0' 0" 2.0943 9510	60° 0' 0" 1.0471 9755	60° 0' 0" 1.0471 9755	0' 0" 0.0000 0000	0.0000 0000
7 deg rad	128° 34' 17" 2.2439 9475	128° 28' 54" 2.2424 3009	51° 25' 43" 0.8975 9790	51° 31' 6" 0.8991 6256	+ 5' 23" +0.0015 6466	0.0017 4317
8 deg rad	135° 0' 0" 2.3561 9449	134° 48' 45" 2.3529 2428	45° 0' 0" 0.7853 9816	45° 11' 15" 0.7886 6837	+ 11' 15" +0.0032 7021	0.0041 6376
9 deg rad	140° 0' 0" 2.4434 6095	139° 43' 20" 2.4386 1220	40° 0' 0" 0.6981 3170	40° 16' 40" 0.7029 8046	+ 16' 40" +0.0048 4875	0.0069 4533
10 deg rad	144° 0' 0" 2.5132 7413	143° 38' 39" 2.5070 6405	36° 0' 0" 0.6283 1853	36° 21' 21" 0.6345 2860	+ 21' 21" +0.0062 1007	0.0098 8364
11 deg rad	147° 16' 22" 2.5703 9399	146° 51' 7" 2.5630 5200	32° 43' 38" 0.5711 9866	33° 8' 53" 0.5785 4066	+ 25' 14" +0.0073 4199	0.0128 5366
12 deg rad	150° 0' 0" 2.6179 9388	149° 31' 36" 2.6097 3100	30° 0' 0" 0.5235 9878	30° 28' 24" 0.5318 6166	+ 28' 24" +0.0082 6288	0.0157 8094
13 deg rad	152° 18' 28" 2.6582 7071	151° 47' 31" 2.6492 7001	27° 41' 32" 0.4833 2195	28° 12' 29" 0.4923 2265	+ 30' 57" +0.0090 0070	0.0186 2258
14 deg rad	154° 17' 9" 2.6927 9370	153° 44' 12" 2.6832 0950	25° 42' 51" 0.4487 9895	26° 15' 48" 0.4583 8315	+ 32' 57" +0.0095 8420	0.0213 5522
15 deg rad	156° 0' 0" 2.7227 1363	155° 25' 29" 2.7126 7411	24° 0' 0" 0.4188 7902	24° 34' 31" 0.4289 1854	+ 34' 31" +0.0100 3952	0.0239 6758



Graph 3

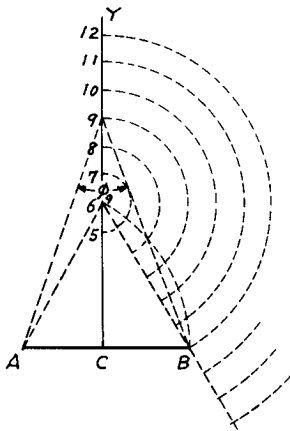


Fig. 2C

場合の中心角を示す)

一般に内接円半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{N-6}{N}$ 中心角を ϕ とすれば

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2Y} = \frac{N}{(2+\sqrt{3})N-12}$$

Table 2 B. C に $N=5 \sim 15$ の計算数値を示し, Graph 2 にこれらを図示した。

§ 3. 与円に内接する正 N 辺形を描く画法

与円の半径 $\overline{AO} = 1$ とする。与円の直径を N 等分し, 点 A より 2 番目の点を Q とする。

点 O を座標の原点とすれば

点 $P\left(-\frac{0}{\sqrt{3}}\right)$ と, 点 $Q\left(\frac{N-4}{N}, 0\right)$ とを結ぶ直線の方程式は

$$\frac{N}{N-4}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - 1 = 0$$

であって, これと円との交点を B とすれば \overline{AB} は内接正 N 辺形の 1 辺となり点 B の X 座標 x_N は

$$x_N = \frac{6\left(\frac{N}{N-4}\right) + \sqrt{12\left(\frac{N}{N-4}\right)^2 - 8}}{6\left(\frac{N}{N-4}\right)^2 + 2}$$

内角 $\phi = \cos^{-1} x_N$ となり正しい中心角 ϕ_0 に対して

$$\text{Absolute Error} = \phi - \phi_0$$

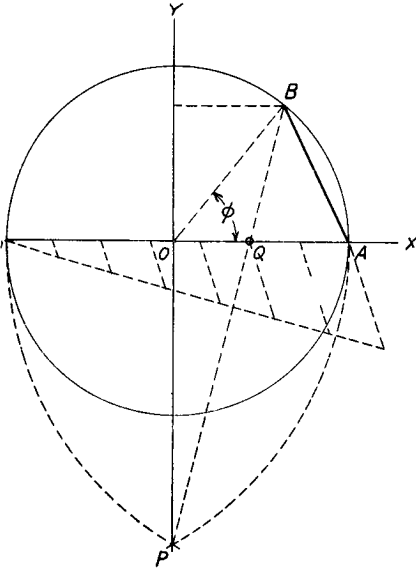


Fig. 3

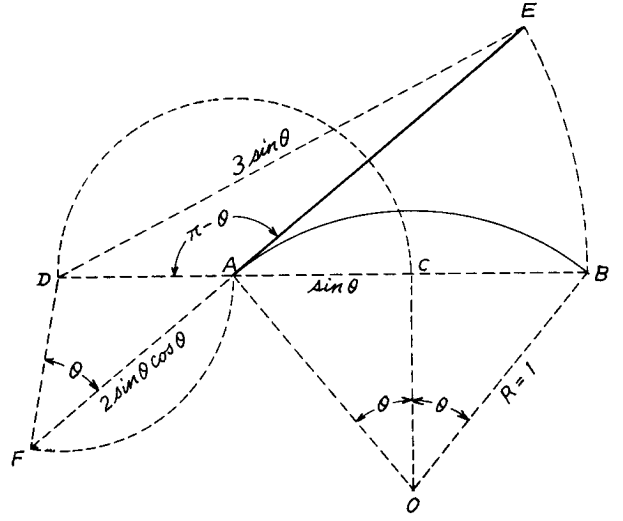


Fig. 4A

解法 B

$$\text{Relative Error} = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$$

Table 3 に $N=5 \sim 15$ の計算数値を示し, Graph 3 にこれらを図示した。

§ 4. 与円弧を直延する画法

解法 A

与円弧を \widehat{AB} , その半径 $R=1$ とすれば \overline{AE} は求める直延長の近似値であって, 他の解法についても同様である。

$$\overline{AE} = \sin \theta (\sqrt{9 - \sin^2 \theta} - \cos \theta)$$

$$\text{Absolute Error} = \overline{AE} - \widehat{AB}$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\overline{AE} - \widehat{AB}}{\widehat{AB}}$$

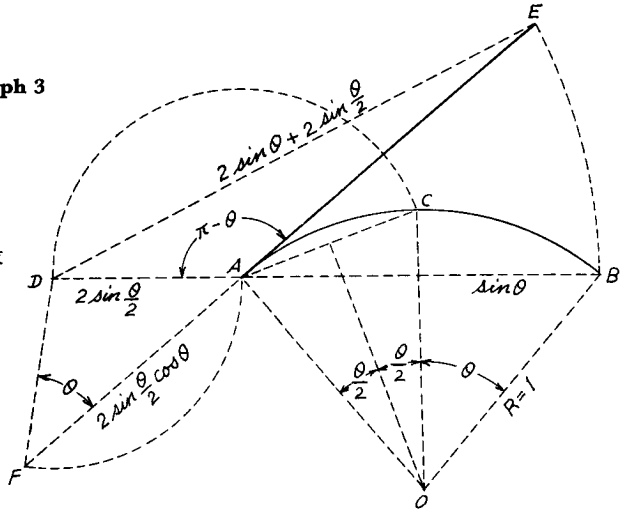


Fig. 4B

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \sqrt{\left(2 \sin \theta + 2 \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ &= \sqrt{4 \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ &= 2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4 \cos \frac{\theta}{2} + 1 - (1 - \cos^2 \theta)} - \cos \theta \right\} \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \sqrt{\cos^2 \theta + 4 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 1 \right)} - \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

Table 4

Method	Central Angle 2θ	Length of Arc \widehat{AB}	Length of Str Line \overline{AE}	Absolute Error	Relative Error
A	15°	0.2617 9939	0.2617 9825	-0.0000 0114	0.0000 0436
	30°	0.5235 9878	0.5235 6214	-0.0000 3663	0.0000 6997
	45°	0.7853 9816	0.7851 1815	-0.0002 8001	0.0003 5652
	60°	1.0471 9755	1.0460 0724	-0.0011 9031	0.0011 3666
	75°	1.3089 9694	1.3053 2593	-0.0036 7101	0.0028 0445
	90°	1.5707 9633	1.5615 5279	-0.0092 4354	0.0058 8462
	105°	1.8325 9571	1.8123 6481	-0.0202 3090	0.0110 3948
	120°	2.0943 9510	2.0544 5588	-0.0399 3922	0.0190 6957
B	15°	0.2617 9939	0.2617 9931	-0.0000 0007	0.0000 0028
	30°	0.5235 9878	0.5235 9645	-0.0000 0233	0.0000 0445
	45°	0.7853 9816	0.7853 7997	-0.0000 1819	0.0000 2316
	60°	1.0471 9755	1.0471 1792	-0.0000 7963	0.0000 7604
	75°	1.3089 9694	1.3087 4204	-0.0002 5490	0.0001 9473
	90°	1.5707 9633	1.5701 2519	-0.0006 7113	0.0004 2726
	105°	1.8325 9571	1.8310 4902	-0.0015 4670	0.0008 4399
	120°	2.0943 9510	2.0911 5834	-0.0032 3676	0.0015 4544
C	15°	0.2617 9939	0.2617 9967	+0.0000 0028	0.0000 0108
	30°	0.5253 9878	0.5236 0795	+0.0000 0918	0.0000 1753
	45°	0.7853 9816	0.7854 6842	+0.0000 7026	0.0000 8945
	60°	1.0471 9755	1.0474 9724	+0.0002 9969	0.0002 8618
	75°	1.3089 9694	1.3099 2623	+0.0009 2929	0.0007 0992
	90°	1.5707 9633	1.5731 5521	+0.0023 5889	0.0015 0171
	105°	1.8325 9571	1.8378 1888	+0.0052 2317	0.0028 5015
	120°	2.0943 9510	2.1048 7550	+0.0104 8040	0.0050 0402

Table 5

Radius Straight Line R/L	Central Angle θ		$\widehat{Arc AD}$	Absolute & Relative Error
	Degree	Radian		
0.6	9° 14' 14"	1.6796 5588	1.0077 9352	0.0077 9352
0.8	7° 47' 18"	1.2529 4243	1.0023 5394	0.0023 5394
1.0	5° 21' 0"	1.0009 4807	1.0009 4807	0.0009 4807
1.2	4° 46' 5"	0.8337 1129	1.0004 5355	0.0004 5355
1.4	4° 56' 8"	0.7144 5980	1.0002 4371	0.0002 4371
1.6	3° 54' 54"	0.6250 8904	1.0001 4247	0.0001 4247
1.8	3° 50' 2"	0.5556 0487	1.0000 8877	0.0000 8877
2.0	2° 38' 58"	0.5000 2909	1.0000 5817	0.0000 5817
2.2	2° 2' 40"	0.4545 6349	1.0000 3967	0.0000 3967

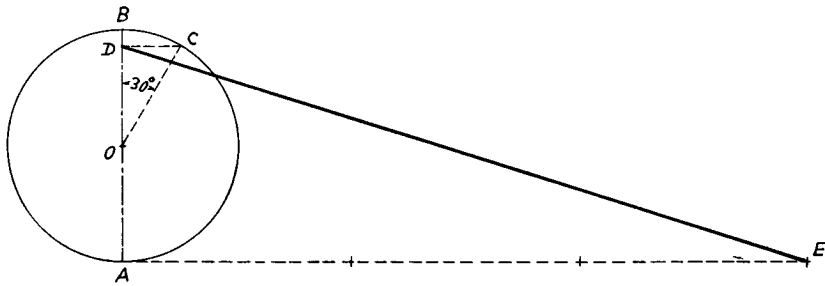


Fig. 6

§ 6. 与円周を直延する画法

直径 $AB=1$ とする。

\overline{DE} は求める円周長さの近似値である。

$$\overline{DE} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 3^2} = 3.1417\ 3695$$

$$\begin{aligned} \text{Absolute Error} &= \overline{DE} - \pi \\ &= 0.0001\ 4430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Relative Error} &= \frac{\overline{DE} - \pi}{\pi} \\ &= 0.0000\ 4593 \end{aligned}$$

§ 7. 与半円周を直延する画法

半径 $\overline{OA}=1$ とする。 \overline{BD} は求める半円周長さの近似値である。

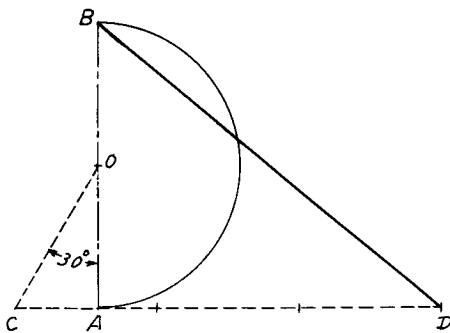


Fig. 7

$$\overline{BD} = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3.1415\ 3331$$

$$\text{Absolute Error} = \overline{BD} - \pi = -0.0000\ 5934$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\overline{BD} - \pi}{\pi} = 0.0000\ 1889$$

§ 8. 円周の長さを与えて、円の直径を求める画法

円周の長さ $\overline{AB}=1$ とする。 \overline{AE} は求める円の直径の近似値である。

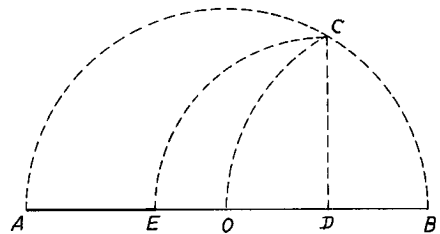


Fig. 8

$$\overline{AE} = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right) = 0.3169\ 8730$$

$$\frac{1}{\overline{AE}} = 3.1547\ 0054 \quad \frac{1}{\pi} = 0.3183\ 0989$$

$$\text{Absolute Error} = \overline{AE} - \frac{1}{\pi} = -0.0013\ 2259$$

$$\text{Relative Error} = \frac{\overline{AE} - \frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} = 0.0041\ 5503$$

これまでの計算結果によって誤差が最も少ない画法を選んで作図できるが、誤差が図面に明かに現れる範囲まで拡げて適用することは避けるべきである。

しかしながら画法の誤差がたとえ僅かであっても、作図が不正確な場合には正しい図解が得られない。したがって画法誤差の許容範囲は、この作業の勝手際（以下作業誤差と呼ぶ）を基準として決めるべきものと考えられる。

作業誤差の実態を知るため約 250 名の学生について、一定の作業〔注〕を与えてその誤差分布を調べたところ、

次の結果を得た。

平均絶対誤差	0.457 mm
平均相対誤差	0.004
標準偏差	0.556 mm

〔注〕課題 1 辺長 100mm の正方形と等積の円を近似画法によって求めること。

作業工程 12

用紙 A 列 4 判ケント紙，鉛筆仕上。

個々の工程の作業誤差については上記の範囲を越えるものがあると思われるが，工程を重ねるにしたがって互に相殺される場合が多く，さらに作業時間の影響もかなりあると推定される。

作業誤差中に当然含まれる用具誤差も無視できない。これを調べるため，作図者の用いている約400個の15cmあるいは18cmの3角定規の直角誤差を最小目盛1'のベベルプロトラクタによって実測集計した結果

平均絶対誤差	3'.778
平均相対誤差	0.0007
標準偏差	4'.647

の数値を得た。すなわち用具の相対誤差は作業相対誤差

中の17.5%を占めている。

これに対して JIS S-6032 合成樹脂製定規の規格による3角定規の直角公差は

特殊級 $\pm 5'$ (相対公差 0.000926)

普通級 $\pm 15'$ (相対公差 0.002778)

となっている。仮に標準偏差の2倍(全数の95.45%)を誤差の許容値とすれば，用具誤差を含む作業の相対誤差はおおよそ1%であって，これに相当する数値以下の画法の相対誤差は一般に許されるべきものであり，またたとえ相対誤差が1%を越える場合であっても画法の絶対誤差が図面に著しく現れない限り，その近似画法を用いても実用上差支ないと考えられる。

図学演習においては，図面の大きがたいていA列4判(長辺297mm)以下であるから，作業の正確に意を用いれば甚しい誤差は図面に現われないのが普通であるが，製図ではA列3判(長辺420mm)に普通級3角定規を用いた場合には最大1.8mmの誤差が現われ，またA列1判(長辺840mm)に特殊級3角定規を用いても最大1.2mmの誤差を免れないことを注意しなければならない。

(昭和43年9月30日受理)